L. Sahline

A.S :2010/2011

Devoir de synthèse N°1

Durée: 2.h

Exercice N°1: (6 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$

1/ On considère l'équation (E) **:** $z^2-(2+i)z+2i=0$.

a) Sans calculer les solutions z' et z'' de l'équation (E) .

- vérifier que : arg (z') + arg (z'') = $\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.
- On donne A et B les points d'affixe z' et z'' ; Déterminer l'affixe du point I milieu du segment [AB]

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2/ Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

On considère l'équation (E_θ) : $z^2-(\sin\theta + 2 + i)z + 2\sin\theta + 2i = 0$.

a) Montrer que l'équation E_θ admet une solution réelle z_1 que l'on calculera.

b) Déterminer l'autre solution z_2

3) Soit A et M les points d'affixes respectifs 2 et $\sin(\theta)+i$

a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ décrit l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$

c) Pour quelle valeur de θ la distance entre A et M est maximal.

Exercice N°2: (4 pts)

Dans l'annexe ci-jointe est représentée dans un repère orthonormé, la courbe ζ_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

- L'axe des abscisses une asymptote horizontale au voisinage de $(-\infty)$
- ζ_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $(+\infty)$
- Un point anguleux de coordonnées (3 , 2)

1/ Donner $f(3)$ et $f(5)$; Justifier que ζ_f admet au moins une tangente horizontale

2/ Déterminer les coordonnées de A point d'inflexion pour ζ_f et donner une équation cartésienne de la tangente (T) à ζ_f en A

3/a) Calculer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Dresser le tableau de variation de f

4/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty, 3]$

a) Justifier que g réalise une bijection de $]-\infty, 3]$ sur un intervalle I que l'on précisera

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1}, fonction réciproque de g à gauche en 2

c) Tracer $\zeta_{g^{-1}}$ dans le même repère

Exercice N°3: (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-1 & \text{si } x\geq 0\\ \dfrac{x-\sin(x)}{1+x^2} & \text{si } x<0\end{cases}$

1/ Montrer que f est continue en 0

2/a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

b) Vérifier que pour tout $x<0$ on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{1-\dfrac{\sin(x)}{x}}{1+x^2}$ puis étudier la dérivabilité de f à gauche en 0

3/a) Montrer que pour tout $x<0$: $\dfrac{x-1}{1+x^2}\leq f(x)\leq\dfrac{x+1}{1+x^2}$

b) Montrer que ζ_f admet une asymptote horizontale au voisinage de $(-\infty)$

c) Montrer que $\Delta : y=x-1$ est une asymptote oblique à ζ_f au voisinage de $(+\infty)$

4/ Soit g la restriction de f sur $[0,+\infty[$

a) Dresser le tableau de variation de g

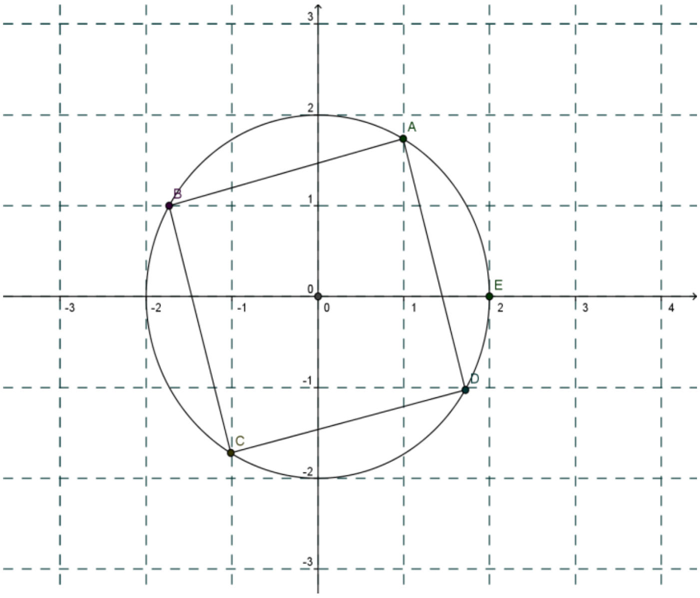
b) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $0\leq g'(x)\leq 1$

c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $0\leq\sqrt{n+1}-1\leq\sqrt{n}$

(Feuille annexe à rendre)

Nom et Prénom .... ***4 sciences*** ***N°...........***

Exercice N°4: (4 pts)



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$

Soit ABCD un carré, OEA un triangle équilatéral

et ζ le cercle de centre O et de rayon 2

Pour chaque proposition une seule réponse est correcte

Entourer la bonne réponse

1/ L'affixe du point A est

a) $Z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ b) $Z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ c) $Z_A = 1+\sqrt{2}$

2/ a) $Z_A + Z_C = 0$ b) $Z_A + Z_C = 2$ c) $Z_A.Z_C = -2$

3/ Les affixes des points A, B, C et D sont les solutions de l'équation :

a) $Z^4 = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$ b) $Z^4 = 16e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ c) $Z^4 = 16$

4/ La forme exponentielle de l'affixe du point D est :

a) $Z_D = -3e^{-i\frac{\pi}{6}}$ b) $Z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ c) $Z_D = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice N°2